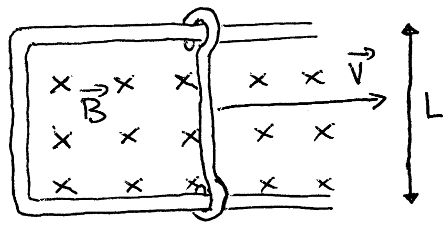
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium - 2017
Studijní program Fyzika - všechny obory kromě Učitelství fyziky-matematiky pro střední školy, Varianta A

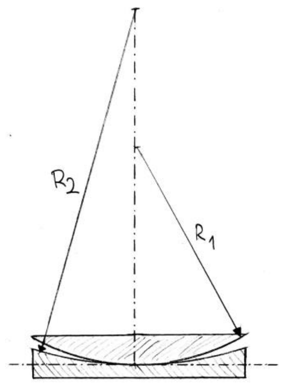
Příklad 1 (25 bodů)
Těleso s hmotností m se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí v_0. Je třeba ho přivést do klidu brzděním na dráze s_0. Brzdná síla postupně klesá lineárně s rychlostí tak, že na konci působení, kdy se těleso zastavilo, klesla na polovinu své původní hodnoty f_0, kterou měla na začátku brzdění. Určete hodnotu brzdící síly f_0 na začátku brzdění.

Příklad 2 (25 bodů)
Drát ve tvaru písmene 'U' z materiálu o zanedbatelném odporu je umístěn v magnetickém poli $\vec{B}$ kolmém k rovině konstrukce. K němu je připevněna pohyblivá příčka o délce L a elektrickém odporu R, která se pohybuje konstantní rychlostí v (viz obr.) a při pohybu zůstává v kontaktu se zbytkem obvodu. Určete:

a) velikost indukovaného elektromotorického napětí U v obvodu;
b) velikost a směr proudu I protékajícího obvodem;
c) velikost a směr síly, jakou magnetické pole působí na volně pohyblivou příčku o délce L;
d) elektrický výkon P_e spotřebovaný v obvodu;
e) mechanický výkon P_m vynaložený na pohyb pohyblivé příčky. Výsledek porovnejte s hodnotou spočtenou v části d)



Příklad 3 (25 bodů)
Máme dvě tenké, sférické čočky ze skla o indexu lomu $n_s = 1{,}5$ umístěné ve vzduchu. Ploskovypuklá čočka má neznámý poloměr křivosti R_1, ploskodutá má poloměr křivosti $R_2 = 2$ m. Ploskovypuklá čočka je vypuklou plochou položena na duté ploše ploskoduté čočky a shora je kolmo osvětlena světlem o vlnové délce $\lambda = 500$ nm. Určete poloměr křivosti R_1 první čočky, má-li 16. světlý kroužek (maximum intenzity) v odraženém světle (při pozorování shora) poloměr $r_{16} = 4$ mm. Předpokládejte, že poloměry kroužků jsou podstatně menší než poloměry křivosti čoček ($r << R_1, R_2$). Výsledek udejte s přesností na jednu platnou číslici.



Příklad 4 (25 bodů)
Polymer krystalizuje v kubické mříži s mřížovou konstantou $a = 150$ nm. Rozhodněte, zda bude možné pozorovat difrakční maxima od rovin typu $hkl_1 \sim 002$ a $hkl_2 \sim 430$, pokud zdrojem bude elektromagnetické záření emitované vodíkovým atomem při přechodu elektronu z kvantové dráhy buď a) $m = 3$ na dráhu $n = 2$, anebo b) z kvantové dráhy m = 3 na dráhu n = 1. *(Povolená nápověda: 1Ry = 13,6 eV. Číselná vyjádření stačí vhodně zaokrouhlit.)*

Příklad 1

Těleso s hmotností *m* se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí v_0. Je třeba ho přivést do klidu brzděním na dráze s_0. Brzdná síla postupně klesá lineárně s rychlostí tak, že na konci působení, kdy se těleso zastavilo, klesla na polovinu své původní hodnoty f_0, kterou měla na začátku brzdění. Určete hodnotu brzdící síly f_0 na začátku brzdění.

Řešení

Nejdříve je nutné nalézt funkční závislost síly během pohybu. Vzhledem k tomu, že čas není v příkladu vůbec zadán a není předmětem vyšetřování, je potřeba najít funkční předpis pro sílu jako funkci rychlosti.

Okrajové podmínky

Na začátku pohybu: $v = v_0$ je $f = f_0$

Na konci pohybu: $v = 0$ je $f = \frac{f_0}{2}$

Funkční závislost pro sílu je tedy: $f = \frac{f_0}{2}(1 + \frac{v}{v_0})$ (5 bodů)

Pozor! Je nutné si uvědomit, že *v* a *f* mají opačný směr! Síla působí proti pohybu.

Newtonova pohybová rovnice pro tento příklad nabývá tvaru:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{f_0}{2}\left(1 + \frac{v}{v_0}\right) \qquad \text{(5 bodů)}$$

Vzhledem k tomu, že známe vzdálenost s0 a neznáme čas zastavení převedeme časovou závislost na vzdálenost.

$$ds = v\,dt$$

$$dt = \frac{ds}{v}$$

Dosadíme do Newtonovy pohybové rovnice

$$\frac{mvdv}{ds} = -\frac{f_0}{2}\left(1 + \frac{v}{v_0}\right) \qquad \text{(5 bodů)}$$

a rovnici integrujeme

$$\int_{v_0}^{0} -\frac{2m}{f_0}\frac{vdv}{1+\frac{v}{v_0}} = \int_0^{s_0} ds \qquad \text{(5 bodů)}$$

S využitím vztahu

$$\frac{v}{v + v_0} = 1 - \frac{v_0}{v + v_0}$$

po integraci dostáváme

$$\frac{2mv_0}{f_0}[v - v_0 ln(v + v_0)]_0^{v_0} = s_0$$

$$\frac{2mv_0}{f_0}(1 - ln2) = s_0$$

Výsledek tedy je

$$f_0 = \frac{2mv_0^2}{s_0}(1 - ln2) \qquad \text{(5 bodů)}$$

Příklad 2

Drát ve tvaru písmene 'U' z materiálu o zanedbatelném odporu je umístěn v magnetickém poli $\vec{B}$ kolmém k rovině konstrukce. K němu je připevněna pohyblivá příčka o délce L a elektrickém odporu R, která se pohybuje konstantní rychlostí v (viz obr.) a při pohybu zůstává v kontaktu se zbytkem obvodu. Určete:

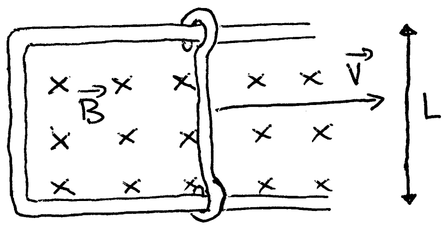
a) velikost indukovaného elektromotorického napětí U v obvodu;

b) velikost a směr proudu I protékajícího obvodem;

c) velikost a směr síly, jakou magnetické pole působí na volně pohyblivou příčku o délce L;

d) elektrický výkon P_e spotřebovaný v obvodu;

e) mechanický výkon P_m vynaložený na pohyb pohyblivé příčky. Výsledek porovnejte s hodnotou spočtenou v části d)



Řešení

a) Aplikací Faradayova zákona elektromagnetické indukce dostáváme

$$U = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial \int \vec{B} \cdot d\vec{S}}{\partial t} = \frac{\partial(\vec{B} \cdot \vec{S})}{\partial t} = -B\frac{\partial S}{\partial t} = -BL\frac{\partial x}{\partial t} = -BLv \qquad \text{(6 bodů)}$$

kde $S = Lx$ je rostoucí část plochy smyčky.

b) Aplikací Ohmova zákona dostáváme pro velikost proudu

$$R = \frac{U}{I} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U}{R} = -\frac{BLv}{R} \qquad \text{(2 body)}$$

Směr proudu odvodíme z Lenzova zákona (Indukovaný elektrický proud v uzavřeném obvodu má takový směr, že svým magnetickým polem působí proti změně magnetického indukčního toku, která je jeho příčinou). Proud teče pohyblivou příčkou směrem nahoru. (2 body)

c) Vyjdeme ze vzorce pro výpočet magnetického příspěvku k Lorentzově síle pro jeden elektron ($\vec{F}_1$) a spočteme sílu $\vec{F}$ působící na vodič s proudem, tedy na všechny elektrony v pohyblivé příčce o délce L, kde směr vektoru $\vec{L}$ je rovnoběžný se směrem toku proudu

$$\vec{F}_1 = q(\vec{u} \times \vec{B}) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = nALq(\vec{u} \times \vec{B}) = (nAqu\vec{L} \times \vec{B}) = I(\vec{L} \times \vec{B}) \quad \Rightarrow \quad F = ILB = \frac{(BL)^2 v}{R}$$

V těchto vztazích je u rychlost pohybu elektronů (na rozdíl od rychlosti v, se kterou se pohybuje příčka), q je náboj elektronu, n je počet elektronů v jednotce objemu, A je plocha průřezu příčky. (8 bodů)

Směr působení síly určíme aplikací pravidla pravé ruky na vektorový součin ve vzorci. Síla působí doleva. (2 body)

d) Ze vzorce pro výpočet elektrického výkonu dostáváme

$$P = UI = \frac{(BLv)^2}{R} \qquad \text{(2 body)}$$

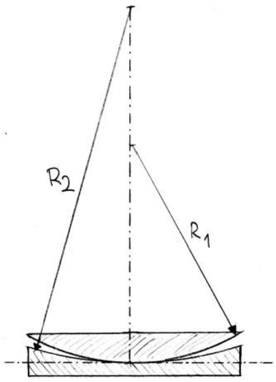
e) Ze vzorce pro výpočet mechanického výkonu dostaneme

$$P = -\frac{W}{t} = -\frac{Fx}{t} = Fv = \frac{(BLv)^2}{R}$$

Z porovnání s výsledkem získaným v části d) je zřejmé, že obě hodnoty jsou stejné. (3 body)

Příklad 3

Máme dvě tenké, sférické čočky ze skla o indexu lomu $n_s = 1{,}5$ umístěné ve vzduchu. Ploskovypuklá čočka má neznámý poloměr křivosti R_1, ploskodutá má poloměr křivosti $R_2 = 2$ m. Ploskovypuklá čočka je vypuklou plochou položena na duté ploše ploskodutné čočky a shora je kolmo osvětlena světlem o vlnové délce $\lambda = 500$ nm. Určete poloměr křivosti R_1 první čočky, má-li 16. světlý kroužek (maximum intenzity) v odraženém světle (při pozorování shora) poloměr $r_{16} = 4$ mm. Předpokládejte, že poloměry kroužků jsou podstatně menší než poloměry křivosti čoček ($r << R_1, R_2$). Výsledek udejte s přesností na jednu platnou číslici.



Řešení

Při interferenci světla na ploskovypuklé čočce položené na duté ploše druhé čočky vznikají pro monochromatické světlo světlé a tmavé kroužky (Newtonovy kroužky).
Z pravoúhlého trojúhelníku šířka vzduchové mezery d_1 od rovinného podkladu v závislosti na vzdálenosti r od místa dotyku a poloměru křivosti R_1 je (4 body)

$$d_1 = R_1 - \sqrt{R_1^2 - r^2} = R_1 - R_1\sqrt{1 - \frac{r^2}{R_1^2}}$$

s uvážením $r << R_1$ (3 body)

$$d_1 \cong R_1 - R_1\left(1 - \frac{r^2}{2R_1^2}\right) = \frac{r^2}{2R_1}$$

Pokud místo rovinného podkladu máme dutou plochu o poloměru křivosti R_2, vzduchová mezera bude mít šířku (3 body)

$$d = d_1 - d_2 = \frac{r^2}{2R_1} - \frac{r^2}{2R_2} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Při kolmém dopadu světla dochází k interferenci světla odraženého od obou rozhraní vzduchové vrstvy o šířce d, tomu odpovídá rozdíl optických drah Δ: (3 body)

$$\Delta = 2nd = 2d$$

kde $n = 1$ je index lomu vzduchu.
Podmínka pro konstruktivní interferenci pro odražené světlo je (na druhém rozhraní světlo mění svou fázi o π) (4 body)

$$\Delta = k\lambda - \frac{\lambda}{2}$$

kde k je pořadí světlého kroužku ($k = 1,2,\ldots$).
Pro šestnáctý světlý proužek dostáváme (5 bodů)

$$d = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda}{2} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda}{r^2} + \frac{1}{R_2} = \frac{\left(16 - \frac{1}{2}\right)\lambda}{r_{16}^2} + \frac{1}{R_2}$$

Po dosazení (3 body)

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\left(16 - \frac{1}{2}\right)500.10^{-9}}{(4.10^{-3})^2} + \frac{1}{2} = 0{,}984 \cong 1\, m^{-1}$$

Ploskovypuklá čočka má poloměr křivosti $R_1 = 1$ m.

Příklad 4
Polymer krystalizuje v kubické mříži s mřížovou konstantou a = 150 nm. Rozhodněte, zda bude možné pozorovat difrakční maxima od rovin typu hkl_1 ~ 002 a hkl_2 ~ 430, pokud zdrojem bude elektromagnetické záření emitované vodíkovým atomem při přechodu elektronu z kvantové dráhy buď a) m = 3 na dráhu n = 2, anebo b) z kvantové dráhy m = 3 na dráhu n = 1. *(Povolená nápověda: 1Ry = 13,6 eV. Číselná vyjádření stačí vhodně zaokrouhlit.)*

Řešení
Známé a neznámé:
Kubická mříž, a = 150 nm = 15 . 10^{-8}m
Emise elektromagnetického záření:
a) $m = 3 \rightarrow n = 2$
b) $m = 3 \rightarrow n = 1$

hkl_1 ~ 002
hkl_2 ~ 430
Viditelnost hkl_1, hkl_2 pro a), b) ... ?

Pozorovatelnost příslušných difrakčních píků závisí na splnění podmínky sin $\theta \in$ <-1 ; 1>.
(body níže)

Z Braggovy rovnice

$$\lambda = 2d_{hkl} \sin \theta_{hkl}$$ (4 body)

vyjádříme $\sin\theta_{hkl} = \dfrac{\lambda}{2d_{hkl}} \in$ <-1 ; 1> . (výraz musí nabývat funkčních hodnot mezi -1 a 1)
(2 body)

Zbývá stanovit d_{hkl} a příslušné $\lambda_{a,b}$:
d_{hkl} : Mezirovinná vzdálenost pro daný typ rovin hkl je pro kubickou látku dána vztahem:

$$d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}\text{, tj. :}$$ (4 body)

$$d_{002} = \frac{a}{2}$$ (1 bod)

$$d_{430} = \frac{a}{5}$$ (1 bod)

(d_{hkl}) může student alternativně určit i jiným způsobem – např. geometrickou úvahou, pokud zřetelně popíše postup získání těchto hodnot – a pokud tyto hodnoty budou správné, tj. stejné jako uvedené výše (alternativně tedy 3 body za každou správně dopočtenou vzdálenost d_{hkl}).

λ: Fotony vyzářené při přeskoku elektronu z hladiny m na hladinu n mají energii

$$\Delta E = -Ry\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$ (4 body) $$= hf = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$ (2 body)

Odtud

$$\lambda_{a,b} = \frac{h \cdot c}{Ry\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)}$$

Číselně lze uvážit (zaokrouhleně), že výraz

$$\frac{h\cdot c}{Ry} \cong \frac{6{,}6\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{13{,}6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}} \cong \frac{19{,}8\cdot 10^{-34+8+19}}{\propto 20} \cong 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

(3 body, z toho 2 body za převod $1\mathrm{eV}=1{,}6.10^{-19}\mathrm{J}$)

a zbývá určit $(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2})$

Pro a): $= \frac{5}{36}$, tj. $\lambda_a \cong \frac{36}{5} \,.\, 10^{-7}\mathrm{m} \cong 700$ nm (odpovídá čáře H_α = 656,3nm)

Pro b): $= \frac{8}{9}$, tj. $\lambda_b \cong \frac{9}{8} \,.\, 10^{-7}\mathrm{m} \cong 112$ nm (odpovídá čáře L_α = 121,6nm) (2 body)

Závěrečná úvaha:

Viditelnost čar H_α a L_α na rovinách 002 a 430 – posouzení výrazu $\frac{\lambda}{2d_{hkl}}$:

?? λ /2d_{hkl} ≤1 ??	**2*d*(nm)⇓ λ (nm) ⇒**	**700**	**112**
hkl ~ 002	150	700/150 >1 **NENÍ**	112/150 < 1 **OK**
hkl ~ 430	60	700/60 > 1 **NENÍ**	112/60 > 1 **NENÍ**

(2 body)